

**ВЕЛИЧАЙШИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ЗАДАЧИ**

THE GREAT MATHEMATICAL PROBLEMS

Marvels and Mysteries of Mathematics

IAN STEWART

P

PROFILE BOOKS

ВЕЛИЧАЙШИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

ИЭН СТЮАРТ

Перевод с английского



Династия



Москва
2015

УДК 519.6
ББК 22.1
С88

Переводчик Наталья Лисова
Редактор Наталья Нарциссова

Стюарт И.

С88 Величайшие математические задачи / Иэн Стюарт ; Пер. с англ. — М.: Альпина нон-фикшн, 2015. — 460 с.

ISBN 978-5-91671-318-3

Закономерности простых чисел и теорема Ферма, гипотеза Пуанкаре и сферическая симметрия Кеплера, загадка числа π и орбитальный хаос в небесной механике. Многие из нас лишь краем уха слышали о таинственных и непостижимых загадках современной математики. Между тем, как ни парадоксально, фундаментальная цель этой науки — раскрывать внутреннюю простоту самых сложных вопросов. Английский математик и популяризатор науки, профессор Иэн Стюарт, помогает читателю преодолеть психологический барьер. Увлекательно и доступно он рассказывает о самых трудных задачах, над которыми бились и продолжают биться величайшие умы, об истоках таких проблем, о том, почему они так важны и какое место занимают в общем контексте математики и естественных наук. Эта книга – проводник в удивительный и загадочный мир чисел, теорем и гипотез, на передний край математической науки, которая новыми методами пытается разрешить задачи, поставленные перед ней тысячелетия назад.

УДК 519.6
ББК 22.1

Все права защищены. Никакая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, включая размещение в сети Интернет и в корпоративных сетях, а также запись в память ЭВМ для частного или публичного использования, без письменного разрешения владельца авторских прав. По вопросу организации доступа к электронной библиотеке издательства обращайтесь по адресу nylib@alpina.ru.

ISBN 978-5-91671-318-3 (рус.)
ISBN 978-1-84668-1998 (англ.)

© Joat Enterprises, 2013

© Издание на русском языке, перевод, оформление. ООО «Альпина нон-фикшн», 2014



Династия

Фонд некоммерческих программ

«Династия»

основан в 2002 г.

Дмитрием Борисовичем Зиминым,

почетным президентом компании «Вымпелком».

Приоритетные направления деятельности Фонда —
поддержка фундаментальной науки и образования в России,

популяризация науки и просвещение.

В рамках программы по популяризации науки

Фондом запущено несколько проектов.

В их числе — сайт elementy.ru, ставший одним
из ведущих в русскоязычном Интернете тематических ресурсов,

а также проект «Библиотека «Династии» —
издание современных научно-популярных книг,
тщательно отобранных экспертами-учеными.

Книга, которую вы держите в руках, выпущена

в рамках этого проекта.

Более подробную информацию о Фонде «Династия»

вы найдете по адресу

www.dynastyfdn.ru.

Содержание

Предисловие	11
1 Великие задачи	15
2 Территория простых чисел ■ Проблема Гольдбаха	37
3 Тайна числа π ■ Квадратура круга	71
4 Загадки картографии ■ Теорема о четырех красках	97
5 Сферическая симметрия ■ Гипотеза Кеплера	127
6 Новые решения старой задачи ■ Гипотеза Морделла	157
7 «Недостаточные поля» ■ Великая теорема Ферма	175
8 Орбитальный хаос ■ Задача трех тел	203
9 Закономерности простых чисел ■ Гипотеза Римана	225
10 Какой формы сфера? ■ Гипотеза Пуанкаре	255
11 Не могут они все быть легкими ■ Задача P/NP	291
12 Потокное мышление ■ Уравнение Навье–Стокса	307
13 Квантовая головоломка ■ Массовая щель	327
14 Диофантовы мечты ■ Гипотеза Берча–Свиннертон- Дайера	351
15 Комплексные циклы ■ Гипотеза Ходжа	367
16 Куда дальше?	395
17 Двенадцать задач на будущее	403
Глоссарий	419
Примечания	433
Предметный указатель	450

Мы должны знать — мы будем знать!

Давид Гильберт,
речь о математических проблемах, произнесенная в 1930 г.
по случаю присвоения Гильберту
звания Почетного гражданина Кёнигсберга

Предисловие

Математика — обширная, непрерывно растущая и столь же непрерывно меняющаяся область знания. Среди бесчисленных вопросов, которыми задаются математики и на которые они по большей части находят ответы, есть немало и таких, которые стоят особняком и возвышаются над всеми прочими, словно горные пики — над предгорьями. Это действительно сложные проблемы, и любой математик отдал бы правую руку за возможность первым найти решение одной из таких масштабных задач. Некоторые из них оставались нерешенными десятилетиями, иные — столетиями, а есть и такие, что не поддавались усилиям математиков несколько тысячелетий. И до сих пор существуют проблемы, которые ученым только предстоит разрешить. Так, последняя теорема Ферма оставалась для математиков камнем преткновения 350 лет, пока Эндрю Уайлс не доказал ее, потратив на эту работу семь лет жизни. Гипотеза Пуанкаре была неприступна больше 100 лет, пока эксцентричный гений Григорий Перельман не нашел доказательство и не превратил ее в теорему (отказавшись при этом от всяких академических почестей и премии в миллион долларов за эту работу). А гипотеза Римана и сегодня, через 150 лет после того, как была сформулирована, остается нерешенной.

Книга «Великие математические задачи» рассказывает о некоторых крупнейших математических проблемах, работа над которыми открыла перед научной мыслью совершенно новые направления и возможности. Читатель познакомится с истоками этих задач, узнает, почему они так важны и какое место занимают в общем контексте математики и естественных наук. В книге представлены как решенные, так и нерешенные задачи из самых разных периодов истории математики.

По существу, рассказ охватывает две с лишним тысячи лет развития науки, однако основное внимание в книге сосредоточено на вопросах, которые либо до сих пор остаются нерешенными, либо были решены относительно недавно, в последние полвека.

Фундаментальная цель математики — раскрывать внутреннюю простоту сложных на первый взгляд вопросов. Это заявление может показаться неочевидным и даже странным, поскольку математическое представление о «простоте» опирается на множество сложных технических концепций. Но важная особенность этой книги заключается именно в том, что акцент в ней сделан на глубинную простоту, а сложности мы стараемся обойти стороной или объясняем простыми словами.

Математика — более молодая и многообразная наука, чем многие думают. По приблизительным оценкам в мире сегодня живет около 100 000 математиков-исследователей, которые каждый год выпускают более *двух миллионов* страниц новых математических изысканий. Это не «новые числа», поисками которых математики не занимаются вообще. И не «новые величины», подобные уже известным, только больше, хотя мы действительно иногда работаем с достаточно большими величинами. Так, про одно недавнее алгебраическое исследование, проведенное командой из 25 математиков, какой-то шутник сказал: «Расчет размером с Манхэттен». Но и это не совсем верно — ребята поскромничали. Размером с Манхэттен у них был *ответ*, а расчет занимал гораздо больше места. Впечатляет, не правда ли? Но главное в математических исследованиях все-таки качество, а не размер и даже не количество. Расчет размером с Манхэттен, о котором шла речь, котируется в обоих отношениях, поскольку дает важную информацию о группе симметрии, играющей существенную роль в математике и, судя по всему, в квантовой физике. Блестящие математические рассуждения и выводы могут уложиться в одну строчку — а могут занять целую энциклопедию. Все зависит от существа и сложности задачи.

При мысли о математике на ум в первую очередь приходят страницы, заполненные малопонятными значками и формулами. Однако те два миллиона страниц, о которых мы говорили, содержат по большей части слова, а не специальные символы. Слова необходимы для объяснения существа проблемы, описания хода мысли и смысла вычислений, и, кроме того, без них невозможно объяснить, какое место все это занимает в постоянно строящемся здании математики. Как заметил на границе XVIII и XIX вв. великий Карл Гаусс, главное в математике — «идеи, а не символы». Тем не менее обычно математические идеи излагаются языком символов. И многие исследовательские работы содержат больше символов, чем слов. Четкости, которую обеспечивают формулы, не всегда можно достичь словами.

Тем не менее нередко математические идеи можно объяснить словами, оставив в стороне большую часть специальных символов. И именно этот принцип лег в основу книги, которую вы держите в руках. Она рассказывает, чем занимаются математики, как они думают и почему предмет их исследований интересен и важен для всего человечества. Она показывает также (и это очень важно), как сегодняшние математики справляются с вызовами своих предшественников, как одна за другой великие загадки прошлого уступают мощным методам настоящего, тем самым изменяя и математику, и естественные науки будущего. Математика по праву относится к величайшим достижениям человечества, и ее важнейшие задачи — решенные и нерешенные — уже не одну тысячу лет направляют и стимулируют творческие силы человека.

Ковентри, июнь 2012 г.

1

Великие задачи

Телепередачи о математике попадаются редко, а хорошие и того реже. Одной из наиболее удачных среди них, причем не только по содержанию, но и по степени увлекательности и вовлеченности зрителей, стала программа о Великой теореме Ферма, которую в 1996 г. снял для научно-популярной серии Horizon британской корпорации BBC Джон Линч. Саймон Сингх, который также участвовал в создании этой программы, превратил рассказанную в ней историю в захватывающую книгу-бестселлер. На своем сайте он рассказал, что поразительный успех передачи стал для всех сюрпризом.

«В нашей программе целых 50 минут математики рассказывают о математике. Не сказать, чтобы это был надежный рецепт создания телевизионного блокбастера, но наша передача взбудоражила зрителей и привлекла внимание критиков. Она получила премию BAFTA как лучшая документальная программа, Приз Италии, другие международные награды и была номинирована на Emmy. Это доказывает, что математика может быть не менее захватывающей темой, чем любая другая».

Я думаю, что успех телепрограммы и книги был обусловлен несколькими причинами, которые имеют немаловажное значение и для моего рассказа. Но чтобы не слишком разбрасываться, я буду говорить только о документальном фильме.

Последняя теорема Ферма — одна из величайших математических проблем, но возникла она из невинного на первый взгляд замечания, сделанного одним из ведущих математиков XVII в. на полях классического учебника. Постепенно проблема приобрела известность, поскольку никто не мог ни доказать, ни опровергнуть утверждение, содержавшееся в оставленной Пьером Ферма заметке на полях. Несмотря на усилия, предпринимавшиеся множеством необычайно умных людей, такое положение вещей сохранялось более 300 лет, поэтому когда в 1995 г. британскому математику Эндрю Уайлсу удалось наконец справиться с этой проблемой, масштаб его достижения был очевиден каждому. Не нужно было даже знать, в чем заключается проблема, не говоря уже о ее решении. В какой-то мере достижение Уайлса — то же самое, что покорение Эвереста.

Помимо научного значения, успешное доказательство теоремы Ферма связано с интереснейшей жизненной историей. В 10 лет Эндрю Уайлс так заинтересовался этой проблемой, что решил стать математиком и обязательно решить ее. Он выполнил первую часть плана и даже выбрал своей специализацией теорию чисел — обширную область математики, к которой относится и Великая теорема Ферма. Однако чем больше он узнавал о математике, тем труднее казалось выполнить задуманное. Теорема Ферма — загадочная диковинка, обособленный вопрос из разряда тех, которые умеет задавать любой специалист по теории чисел (ведь для этого не нужно никаких доказательств). Она не укладывается ни в одну систему мощных доказательных средств. Великий Гаусс в письме к Генриху Ольберсу попросту отмахнулся от нее, заметив, что эта проблема «мне не особенно интересна, поскольку легко можно сформулировать множество подобных утверждений, которые никто не может ни доказать, ни опровергнуть». Уайлс решил, что его детская мечта неосуществима, и отложил теорему Ферма в долгий ящик. Однако затем, будто по волшебству, другие математики совершили прорывное открытие, неожиданно связавшее теорему со стержневой темой теории чисел,

причем именно той, которой и занимался Уайлс. Гаусс, как оказалось, в свое время недооценил значение этой проблемы, что для него вообще-то было нехарактерно; он не подозревал, что она может быть связана с глубокой, но на первый взгляд достаточно далекой областью математики.

Теперь, когда связь была установлена, Уайлс мог работать над загадкой Ферма и одновременно проводить значимые исследования в рамках современной теории чисел. Даже если с доказательством Великой теоремы ничего бы не получилось, все, что удалось открыть в ходе исследований, было бы достойно публикации. Так что старые наработки были извлечены на свет божий, и Уайлс начал всерьез обдумывать проблему. Через семь лет усердных трудов (а работал он втайне от ученого сообщества, что для математиков совсем не характерно) Уайлс пришел к выводу, что решение найдено. На престижной конференции по теории чисел он прочел серию лекций под невнятным названием, которое никого не обмануло. Новость разлетелась и произвела сенсацию, причем не только в академических кругах, но и в средствах массовой информации. Теорема Ферма доказана!

Полученное Уайлсом доказательство, полное оригинальных идей, оказалось красивым и элегантным. К несчастью, специалисты вскоре обнаружили в его логике серьезный пробел. Как это ни печально, при решении великих (и обычно очень известных) математических задач такое происходит сплошь и рядом, и, как правило, для очередного доказательства такой поворот событий оказывается роковым. Однако на этот раз судьба была благосклонна: при помощи бывшего своего ученика Ричарда Тейлора Уайлсу удалось ликвидировать пробел, исправить доказательство и завершить работу. Эмоциональное напряжение этого момента очень хорошо видно на экране: пожалуй, это единственный случай, когда ученый-математик расплакался перед камерой при одном только воспоминании о тех драматических событиях и последовавшем за ними триумфе.

Вы, наверное, заметили, что я так и не рассказал вам, в чем, собственно, *заключается* Великая теорема Ферма. Я сделал (или, вернее, не сделал) это намеренно: о самой теореме речь пойдет в свое время. Ведь успех телепередачи с сутью теоремы почти не связан. Мало того, математики никогда не придавали особого значения тому, верна ли теорема, которую Ферма небрежно набросал на полях книги, или нет. От ответа на этот вопрос ничего особенно важного не зависит. Откуда же такой интерес к нему? Все очень просто. Огромное значение может иметь именно то, что все математическое сообщество было не в состоянии *найти* этот ответ. И дело вовсе не в самоуважении: это означало, что в существующих математических теориях не хватает чего-то принципиально важного. К тому же теорема очень просто формулируется, и это добавляет загадочности всей ситуации. Как может что-то настолько на первый взгляд простое оказаться таким сложным?

Математиков не слишком заботил ответ на вопрос, поставленный Ферма, зато глубоко заботил тот факт, что они ответа не знают. К тому же им хотелось найти метод решения этой проблемы, поскольку он, по идее, должен был пролить свет не только на вопрос Ферма, но и на множество других вопросов. Опять же так нередко случается с математическими загадками: методы, использованные для их решения, часто важнее результатов. Разумеется, иногда результат тоже важен — все зависит от его следствий.

Доказательство Уайлса слишком сложно для телепередачи, разобраться в нем могут только специалисты. В нем есть математическая красота и интрига, как мы убедимся в свое время, но любая попытка объяснить что-то подобное по телевизору привела бы к немедленной потере интереса у большей части аудитории. Поэтому программа разумно сосредоточилась на более личном вопросе: каково это — решить математическую проблему, известную своей сложностью и влекущую за собой целый шлейф исторических ассоциаций? Телезрителям показали, что существует небольшая, но увлеченная группа

математиков, разбросанных по всему миру, что все они глубоко погружены в предмет своих исследований, общаются друг с другом, следят за последними разработками и вообще посвящают значительную часть жизни продвижению математических знаний. Создатели фильма очень живо показали эмоциональную вовлеченность и социальное единство этих людей. Это не разумные автоматы, а реальные люди, любящие свое дело. В этом и заключается главный посыл фильма.

Мы можем сформулировать три основные причины успеха этой программы: серьезная и известная проблема, герой с увлекательной, по-человечески интересной историей и группа поддержки — целая каста эмоционально вовлеченных в процесс людей. Но я подозреваю, что существует и четвертая причина, не столь явная. Люди, не связанные с математикой, по многим объективным причинам редко слышат о новых достижениях в этой области, да и не так уж сильно интересуются этим. В газетах лишь изредка упоминается что-нибудь связанное с математикой, а если и упоминается, то лишь приводятся какие-то отрывочные или тривиальные факты. Наконец, действия и достижения математиков где-то там за кулисами не оказывают, на первый взгляд, никакого влияния на повседневную жизнь. А школьная математика зачастую предстает перед учащимися как уже закрытая книга, где на каждый вопрос есть готовый ответ. Школьникам обычно кажется, что ничего нового в математике днем с огнем не сыщешь.

Если смотреть под таким углом зрения, то главное в достижении Уайлса — не то, что Великая теорема Ферма была доказана, а то, что наконец-то *в математике свершилось хоть что-то новое*. Поскольку на поиск доказательства теоремы у ученых ушло больше 300 лет, многие зрители восприняли открытие Уайлса как первое существенное достижение в математике за весь этот период. Я не говорю, что все *действительно* именно так и решили. Понятно, что подобная позиция рассыпалась бы в прах при первом же очевидном вопросе вроде: «Почему правительство тратит немалые деньги на финанси-

рование университетских математических исследований?» Но на подсознательном уровне все сочли, что это именно так, не задаваясь вопросами и не размышляя. Поэтому достижение Уайлса приобрело в глазах нематематиков еще большие масштабы.

Одна из целей этой книги — наглядно продемонстрировать всем, в том числе и неспециалистам, что математика сейчас на подъеме, а новые открытия в ней — совсем не редкость. Вы почти ничего об этом не слышите просто потому, что большая часть математических работ слишком сложна для неспециалистов, а средства массовой информации с опаской относятся к интеллектуалам и боятся публиковать что-либо сложнее «X-фактора». Кроме того, практическое приложение математики обычно скрыто от глаз потребителя, причем зачастую намеренно, чтобы не волновать его. «Что? Работа моего айфона построена на математических формулах? Но у меня же по математике всегда была пара! Как я буду входить в “Фейсбук”?»

Исторически новые достижения в математике часто следуют за открытиями в других областях знания. Исаак Ньютон, разработав законы механики и всемирного тяготения, которые описывают движение планет, не избавился разом от всех проблем в понимании устройства Солнечной системы. Наоборот, после этого перед математиками встал ряд новых вопросов: да, конечно, мы знаем законы, но что они подразумевают? В поисках ответов Ньютон придумал дифференциальное (интегральное) исчисление, но и у нового метода обнаружились ограничения. Зачастую он вместо ответа на вопрос просто дает иную его формулировку. Так, с его помощью некоторые задачи можно легко записать в виде специальной формулы, известной как дифференциальное уравнение. *Решение* этого уравнения и есть искомый ответ. Но это решение еще надо найти. Тем не менее дифференциальное исчисление послужило мощным стартом. Оно показало, что ответ в принципе возможен, и снабдило ученых эффективным методом его поиска. До сих

пор, хотя прошло уже больше 300 лет, этот метод помогает математикам совершать крупные открытия.

По мере того как росла сумма математических знаний человечества, все большую роль в мотивации новых исследований стал играть еще один фактор: внутренние запросы самой математики. Если, к примеру, вы умеете решать алгебраические уравнения первой, второй, третьей и четвертой степеней, вам не нужно обладать очень уж богатым воображением, чтобы задаться вопросом об уравнениях пятой степени. (По существу, степень уравнения есть мера его сложности, но чтобы задать очевидный вопрос, не обязательно даже знать, что это такое.) Если решение не дается — как, собственно, и было, — то этот факт *сам по себе* заставляет математиков еще более усердно искать его, и при этом неважно, будет ли вожделенный результат иметь какую-либо практическую пользу.

Я не утверждаю, что практическое приложение не имеет значения. Но если какая-то конкретная математическая составляющая раз за разом возникает в вопросах, скажем, физики волн — океанских волн, вибраций, звука, света, — то понятно, что исследовать ее закономерности было бы полезно. Не обязательно знать заранее, какое приложение найдет новая идея: тема волн фигурирует во многих важных областях, так что серьезные результаты непременно где-нибудь пригодятся. В данном случае этим «где-нибудь» стали радио, телевидение и радары. Если кто-то придумает новый подход к тепловым потокам и без всякого математического обоснования предложит новый блестящий метод, то, безусловно, будет очень полезно разобраться во всем этом *как в чисто математической задаче*. И даже если вам нет никакого дела до тепловых потоков, результат обязательно пригодится где-то еще. Фурье-анализ, разработанный в ходе исследования именно этой области, оказался, возможно, самой полезной математической идеей всех времен. Это, по существу, основа современных телекоммуникаций: он обеспечивает работу цифровых камер, помогает реставрировать старые кинофильмы и звукозаписи, а его

современное расширение использует ФБР для хранения отпечатков пальцев.

За несколько тысячелетий подобная взаимосвязь между практическим применением математики и ее внутренней структурой привела к тому, что они тесно переплелись и стали почти неотделимы друг от друга. Тем не менее математика делится на две области: чистую и прикладную. Это деление помогает оценить место математических открытий в структуре человеческого знания, однако оно довольно условно. В лучшем случае так можно различить два конца одного непрерывного спектра математических стилей и методов. В худшем — такая классификация вводит нас в заблуждение относительно того, что именно приносит пользу и что служит источником идей. Как и в других областях науки, силу математике придает сочетание абстрактных рассуждений и вдохновения, почерпнутого из внешнего мира. Говоря попросту, они питают друг друга. Разделить математику на две составляющие не просто невозможно — это бессмысленно.

Большинство по-настоящему важных математических задач — великих задач, которым посвящена эта книга, — возникли внутри математического поля в процессе своеобразной интеллектуальной медитации. Причина проста: это сугубо *математические* задачи. Математика часто представляется набором изолированных областей, в каждой из которых господствуют собственные методы: это алгебра, геометрия, тригонометрия, математический анализ, комбинаторика, теория вероятностей. Ее обычно так и преподают, и не без причины: четкое разделение тем помогает учащимся разложить по полочкам учебный материал в своей голове. И действительно, такое деление — вполне разумный способ понять в первом приближении структуру математической науки, особенно классической, давно устоявшейся. Однако на переднем крае исследований это четкое деление часто рушится. И дело не только в том, что границы между основными областями математики размыты, — в реальности их просто нет.

Каждый математик-исследователь знает, что в любой момент внезапно и непредсказуемо может оказаться, что проблема, над которой он работает, требует свежих идей из какой-то совершенно посторонней, на первый взгляд, области. Более того, новые исследования часто захватывают сразу несколько областей. К примеру, мои исследования сосредоточены по большей части на формировании структур в динамических системах — системах, которые изменяются во времени по определенным правилам. Типичный пример — движение животных. Лошадь при движении рысью раз за разом повторяет одну и ту же последовательность движений ног, и в этих движениях есть четкая закономерность: копыта ударяют по земле попеременно, диагональными парами. Иными словами, лошадь ставит сначала левую переднюю и правую заднюю ноги, затем правую переднюю и левую заднюю. О чем же эта задача? О паттернах, и тогда решать ее надо методами теории групп — алгебры симметрий? Или это задача из динамики — и тогда к решению нужно привлекать ньютоновские дифференциальные уравнения?

Ответ таков: эта задача по определению относится к обеим названным областям. Причем это не пересечение областей, где мог бы находиться материал, общий для обеих, — они почти не пересекаются. Нет, это новая «область», охватывающая два традиционных раздела математики. Она как мост через реку, разделяющую две страны, связывает их, но не принадлежит ни одной. Но этот мост — не узкая полоса дороги: по размерам его можно сравнить с каждой из соединяемых стран. И, что еще важнее, используемые здесь методы не ограничиваются теми, что используются на прилежащих территориях. Фактически в моих исследованиях пригодились знания во всех областях математики, которые я когда-либо изучал. Так, курс по теории Галуа, который я слушал в Кембридже студентом, был посвящен решению (или, точнее, анализу причин, по которым мы не можем их решить) алгебраических уравнений пятой степени. В курсе по теории графов говорилось о сетях,

т. е. о точках, соединенных линиями. Я не занимался динамическими системами, поскольку защищал докторскую по алгебре, но с годами познакомился с основными понятиями по этой теме — от статических состояний до хаоса. Итак, теория Галуа, теория графов, динамические системы: три отдельные области. По крайней мере я считал их таковыми до 2011 г., когда меня вдруг заинтересовал вопрос распознавания хаотической динамики в сети динамических систем, и тогда необходимым для исследования оказалось все то, что я узнал 45 лет назад на курсе по теории Галуа.

Итак, математика не похожа на политическую карту мира, где страны разделяются четкими границами и аккуратно окрашиваются каждая в свой цвет: розовый, зеленый или голубой. Она скорее напоминает естественный ландшафт, где никогда нельзя сказать наверняка, где заканчивается долина и начинаются предгорья, где лес переходит в лесостепь, кустарниковые заросли и настоящие степи, где озера вплавают в окружающий ландшафт свои водяные зеркала, а реки связывают заснеженные горные склоны с далеким океаном. Но этот вечно меняющийся математический ландшафт состоит не из скал, воды и растений, а из идей, и соединяет все вместе не география, а логика. К тому же это динамичный ландшафт: он изменяется с появлением новых идей, с каждым новым открытием, с изобретением каждого нового метода. Важные концепции с множеством приложений подобны горным пикам, универсальные методики — широким рекам, несущим путешественников через плодородные равнины. Чем четче вырисовывается ландшафт, тем проще разглядеть на нем непокоренные еще вершины или неисследованные местности, которые часто воздвигают перед путником неожиданные и нежеланные препятствия. Со временем некоторые из этих пиков и препятствий становятся знаковыми. Это и есть великие проблемы математики.

Что делает математическую задачу великой? Интеллектуальная глубина в сочетании с простотой и элегантностью. Плюс

к тому она должна быть *сложной*. Кто угодно может взобраться на холмик, но Эверест — совсем другое дело. Сформулировать великую задачу обычно нетрудно, хотя условия могут быть как элементарными, так и очень специальными и понятными только профессионалу. Если Великая теорема Ферма и проблема четырех красок без особых пояснений понятны всякому, кто знаком со школьной математикой, то, к примеру, гипотезу Ходжа или теорию Янга–Миллса даже сформулировать невозможно без привлечения глубоких концепций с переднего края науки (в конце концов, последняя имеет непосредственное отношение к квантовой теории поля). Тем не менее для специалиста в соответствующей области формулировки этих проблем звучат просто и естественно. Для их изложения не нужны многие страницы непонятного текста. И, наконец, существуют задачи, для детального понимания которых требуется уровень хотя бы университетского курса математики. Но более общий уровень понимания существа проблемы — откуда она взялась, почему важна, что можно было бы сделать, имея ее решение, — как правило, доступен любому интересующемуся, и именно это я попытаюсь вам объяснить. Правда, гипотеза Ходжа — крепкий орешек в этом отношении, поскольку она очень технична и очень абстрактна. Однако это одна из семи математических задач тысячелетия, за решение которых Институт Клэя предлагает приз в 1 млн долларов, и потому о ней непременно стоит рассказать.

Великие задачи несут в себе громадный творческий потенциал: они помогают создавать новую математику. В 1900 г. на Международном конгрессе математиков в Париже Давид Гильберт прочел лекцию, в которой перечислил 23 важнейшие математические проблемы. Он не включил в свой список Великую теорему Ферма, но упомянул ее во вступительном слове. Надо отметить, что, когда выдающийся математик перечисляет великие, по его мнению, проблемы, остальные математики относятся к этому очень серьезно. Понятно, что ни одна задача не оказалась бы в этом списке, не будь она важной и сложной.

Для человека естественно отвечать на вызов и преодолевать препятствия. С тех самых пор решение одной из гильбертовых проблем стало отличным способом завоевать себе математические «золотые шпоры». Многие из этих задач слишком специализированы, чтобы включать их в эту книгу, другие представляют собой скорее программу, направление исследований, чем конкретные задачи, а некоторые мы рассмотрим позже по отдельности. Но сам список тоже заслуживает упоминания, и я включил его с кратким комментарием в примечания¹.

Именно это делает великие математические задачи великими. Проблема редко заключается в том, чтобы найти ответ. Математики очень четко представляют себе, какими должны быть ответы буквально всех великих задач, — или представляли, если на сегодняшний день решение уже известно. В самом деле, ожидаемый ответ часто заключен уже в формулировку вопроса. Гипотеза представляет собой правдоподобную догадку, предположение, основанное на совокупности данных. Как правило, хорошо изученные гипотезы со временем находят подтверждение, хотя так происходит не всегда. А в случае теоремы Ферма слово «теорема» употребляется (или, точнее, употреблялось) неверно — у теоремы обязательно должно быть доказательство, а его-то, пока не появился Уайлс, и не хватало.

Доказательство — вот то, чего требуют великие задачи и что делает их такими сложными. Любой человек, обладающий определенными знаниями, способен провести несколько вычислений, заметить явную закономерность и кратко сформулировать ее суть. Но математики требуют большего: они настаивают на полном, логически безупречном доказательстве. Или, если гипотеза не подтверждается, на столь же полном опровержении. Вообще же невозможно оценить всю чарующую привлекательность великой задачи, не понимая до конца жизненно важную роль доказательства в любом математическом предприятии. Обоснованное предположение может сделать кто угодно, трудно лишь доказать его истинность. Или ложность.

Концепция математического доказательства менялась с течением времени, причем требования к логике, как правило, становились все строже. Многочисленные высокоинтеллектуальные философские дискуссии о природе доказательства поднимали важные вопросы. Предлагались и внедрялись точные определения понятия «доказательство». Сегодня мы учим студентов, что доказательство начинается с набора некоторых явных допущений, известных как аксиомы. Аксиомы — это, так сказать, правила игры. В принципе возможны и другие аксиомы, но они относятся к другим играм. Первым такой подход предложил древнегреческий математик Евклид, но и сегодня он вполне применим. Доказательство на основе принятых аксиом представляет собой серию шагов, каждый из которых является логическим следствием либо аксиом, либо уже доказанных утверждений, либо того и другого. По существу, математика исследует логический лабиринт, перекрестками в котором служат утверждения, а проходами — достоверные умозаключения. Доказательство — путь через лабиринт, который начинается с аксиом. Утверждение, на котором он заканчивается, и есть то, что требовалось доказать.

Однако такое правильное и «причесанное» представление о доказательстве — еще не вся история и даже не самая главная ее часть. Это все равно что сказать: симфония — последовательность музыкальных нот, которая подчиняется законам гармонии. Определение верно, но где же творчество? Такое определение ничего не говорит нам не только о том, как искать доказательство, но и о том, как проверить его, когда оно предложено кем-то другим. Это определение ничего не говорит нам о том, какие места в лабиринте важнее других. Не говорит и о том, какие проходы в нем элегантны, а какие безобразны, какие значительны, а какие бесполезны. Это всего лишь формальное, механическое описание процесса, у которого немало и других аспектов, в частности человеческое измерение. Доказательства ищут люди, и математические исследования — отнюдь не воплощение пошаговой логики.

Формальный подход к определению доказательства может породить доказательства почти нечитаемые, поскольку основные усилия придется бросить на копание в мелочах и «расставление точек над логическими i », в то время как решающий вывод будет буквально бросаться в глаза. Поэтому практикующие математики спрямяют путь и оставляют за бортом все рутинные или очевидные шаги. На пропуски обычно указывают фразы вроде «несложно показать, что...» или «из стандартных расчетов следует, что...» Зато ни один математик не пройдет — по крайней мере сознательно — мимо логической трудности и не попытается сделать вид, что ее нет. Более того, компетентный математик постарается обратить особое внимание на слабые с точки зрения логики звенья цепочки рассуждений и потратит большую часть времени и усилий на то, чтобы укрепить их и сделать достаточно надежными. Дело в том, что на практике доказательство — это математическая история с собственным сюжетом. У нее есть завязка, кульминация и развязка. В ней часто можно обнаружить боковые сюжетные ходы, которые вырастают из основного ствола, но ведут каждый к своему результату. Британский математик Кристофер Зиман однажды заметил, что любая теорема — это своего рода интеллектуальная точка покоя, где можно сделать остановку, перевести дыхание и ощутить некоторую определенность. Побочная сюжетная линия помогает свести концы с концами в основном сюжете. Доказательство напоминает литературный сюжет и в других отношениях: в них часто имеются один или несколько главных героев — конечно, это не люди, а идеи, — сложные взаимоотношения которых ведут к развязке и финалу.

Как явствует из формального определения, доказательство начинается с неких четких предположений, движется шаг за шагом от одного логического вывода к другому и заканчивается выводом о том, что вы, собственно, хотели доказать. Но доказательство — не просто список последовательных умозаключений, и логика в нем — не единственный критерий.

Доказательство — это рассказ, который выслушивают и разбирают по косточкам люди, посвятившие большую часть жизни искусству прочтения таких историй и поиска в них ошибок и противоречий. Основная цель этих людей — доказать, что автор доказательства *не прав*. Эти люди обладают поразительной способностью замечать слабые места и без усталости долбить в них, пока вся конструкция не рухнет, подняв облако пыли. Вообще, если какой-нибудь математик заявляет, что ему удалось решить крупную проблему (одну из великих, например, или что-нибудь попроще, но тоже достойное), остальные математики не спешат кричать «Ура!» и открывать шампанское. Профессиональный инстинкт велит им прежде всего постараться опровергнуть предложенное доказательство.

Так или иначе, доказательство — это единственный надежный инструмент, при помощи которого математики могут убедиться в собственной правоте. Предвидя реакцию математического сообщества, исследователи тратят огромные усилия на проверку собственных выводов и поиск противоречий в них. Так проще. Если же история успешно выдерживает критический анализ коллег, сообщество вскоре приходит к выводу, что она верна, и в этот момент создатель доказательства получает заслуженные похвалы и награды. Во всяком случае, обычно бывает именно так, хотя непосредственным участникам событий это может видеться иначе. Когда ты вовлечен во что-то, то воспринимаешь все не так, как сторонний наблюдатель.

Как математики решают задачи? Этот вопрос почти не изучался. Современные образовательные исследования на базе когнитивистики в основном ограничиваются изучением образования от начальной до высшей школы. Есть исследования, посвященные преподаванию математики в вузах, но их не так уж много. Кроме того, есть большая разница между освоением и преподаванием математики и новыми исследованиями в этой области. Многие из нас умеют играть на каком-нибудь

музыкальном инструменте, но мало кто способен сочинить симфонический концерт или хотя бы написать популярную песенку.

Когда речь заходит о творчестве на высочайшем уровне, почти все, что мы знаем — или думаем, что знаем, — мы получаем путем самоанализа. Мы просим математиков объяснить ход их мыслей и пытаемся выделить в этих описаниях общие принципы. Одной из первых серьезных попыток понять, как думают математики, можно считать книгу Жака Адамара «Исследование психологии процесса изобретения в области математики»¹, вышедшую в 1945 г. Адамар расспросил ведущих математиков и физиков своего времени и попросил описать, как они думают в процессе работы над сложной задачей. И тут выявилась важная и даже необходимая роль того, что за неимением лучшего термина следует назвать интуицией. Их мысли направляло нечто подсознательное. Самые плодотворные их идеи и озарения не приходили постепенно, в результате логической пошаговой проработки, а возникали неожиданно, и весь процесс развивался скачкообразно.

Одно из самых подробных описаний этого на первый взгляд нелогичного подхода к логическим вопросам дал французский математик Анри Пуанкаре — один из ведущих ученых конца XIX — начала XX в. Пуанкаре отметил, едва ли не во всех областях математической науки, внес радикальные изменения во многие из них и основал несколько новых ее разделов. В последующих главах мы не раз будем возвращаться к его работам. Кроме того, Пуанкаре писал научно-популярные книги, и, возможно, именно огромный опыт и широта кругозора помогли ему глубже понять процесс собственного мышления. Во всяком случае, он был твердо убежден, что осознанная логика — лишь часть творческого процесса. Да, бывают моменты, когда без нее не обойтись: к примеру, без логики невозможно понять, в чем именно состоит проблема, как невозможно

¹ Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. — М.: Советское радио, 1970.