

# Оглавление

Предисловие . . . . .	8
Основные обозначения . . . . .	9

## Часть I. Функции одной переменной

<b>Глава 1.</b> Вещественные числа. Счётные и несчётные множества . . . . .	13
§ 1.1. Дедекиндовы сечения . . . . .	13
§ 1.2. Десятичная запись вещественного числа . . . . .	15
§ 1.3. Некоторые неравенства . . . . .	16
§ 1.4. Отображения множеств . . . . .	17
§ 1.5. Счётные и несчётные множества . . . . .	17
§ 1.6. Теорема Кантора—Бернштейна . . . . .	21
§ 1.7. Решения задач . . . . .	22
<b>Глава 2.</b> Предел последовательности . . . . .	29
§ 2.1. Свойства пределов . . . . .	29
§ 2.2. Возрастающие последовательности. Теорема Вейерштрасса . . . . .	31
§ 2.3. Последовательности Коши . . . . .	32
§ 2.4. Вычисление некоторых пределов . . . . .	34
§ 2.5. Число $e$ . . . . .	36
§ 2.6. Верхний и нижний пределы . . . . .	38
§ 2.7. Теорема Тёплица . . . . .	40
§ 2.8. Решения задач . . . . .	41
<b>Глава 3.</b> Непрерывные функции . . . . .	51
§ 3.1. Предел функции . . . . .	51
§ 3.2. Непрерывность . . . . .	53
§ 3.3. Теорема о промежуточном значении . . . . .	55
§ 3.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке . . . . .	55
§ 3.5. Логарифм и показательная функция . . . . .	56
§ 3.6. Гиперболические функции . . . . .	58
§ 3.7. Равномерная непрерывность. Равномерная сходимоть . . . . .	59
§ 3.8. Липшицевы функции и теорема о неподвижной точке . . . . .	62
§ 3.9. Выпуклые функции . . . . .	63
§ 3.10. Функции ограниченной вариации . . . . .	65
§ 3.11. Решения задач . . . . .	66
<b>Глава 4.</b> Топология вещественных чисел . . . . .	79
§ 4.1. Открытые и замкнутые множества . . . . .	79
§ 4.2. Компактные множества . . . . .	82

§ 4.3. Связные множества . . . . .	85
§ 4.4. Всюду плотные множества . . . . .	87
§ 4.5. Совершенные множества . . . . .	88
§ 4.6. Полунепрерывные функции . . . . .	90
§ 4.7. Теорема Бэра . . . . .	91
§ 4.8. Предел по фильтру . . . . .	92
§ 4.9. Решения задач . . . . .	93
<b>Глава 5. Дифференцируемые функции . . . . .</b>	<b>102</b>
§ 5.1. Определение производной . . . . .	102
§ 5.2. Производные элементарных функций . . . . .	104
§ 5.3. Производная многочлена и кратные корни . . . . .	105
§ 5.4. Касательная и нормаль . . . . .	106
§ 5.5. Функции, дифференцируемые на отрезке . . . . .	107
§ 5.6. Неравенства . . . . .	109
§ 5.7. Правило Лопиталья . . . . .	110
§ 5.8. Алгебраические и трансцендентные функции . . . . .	111
§ 5.9. Формула Тейлора . . . . .	111
§ 5.10. Равномерная сходимость дифференцируемых функций . . . . .	114
§ 5.11. Промежуточные значения производной . . . . .	115
§ 5.12. Многочлены Чебышёва . . . . .	116
§ 5.13. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Эрмита . . . . .	118
§ 5.14. Формула Фаа-ди-Бруно . . . . .	120
§ 5.15. Решения задач . . . . .	122
<b>Глава 6. Интегрирование . . . . .</b>	<b>134</b>
§ 6.1. Неопределённый интеграл . . . . .	134
§ 6.2. Вычисление неопределённых интегралов . . . . .	135
§ 6.3. Интеграл Римана . . . . .	140
§ 6.4. Теорема о среднем . . . . .	142
§ 6.5. Формула Ньютона—Лейбница . . . . .	143
§ 6.6. Формула замены переменной в определённом интеграле . . . . .	144
§ 6.7. Остаточный член в интегральной форме . . . . .	145
§ 6.8. Вычисление определённых интегралов . . . . .	146
§ 6.9. Вычисление площадей . . . . .	147
§ 6.10. Вычисление объёмов . . . . .	147
§ 6.11. Длина кривой . . . . .	148
§ 6.12. Площадь поверхности вращения . . . . .	149
§ 6.13. Некоторые применения интегралов . . . . .	151
§ 6.14. Несобственные интегралы . . . . .	152
§ 6.15. Равномерная сходимость интегрируемых функций . . . . .	153
§ 6.16. Ортогональные многочлены . . . . .	156
§ 6.17. Среднее значение длины проекции . . . . .	161
§ 6.18. Преобразование Лежандра . . . . .	163
§ 6.19. Среднее арифметико-геометрическое . . . . .	164

§ 6.20. Прямая как дифференцируемое многообразие . . . . .	166
§ 6.21. Решения задач . . . . .	168
<b>Глава 7. Ряды . . . . .</b>	<b>182</b>
§ 7.1. Ряды с положительными членами . . . . .	182
§ 7.2. Абсолютно сходящиеся ряды . . . . .	188
§ 7.3. Признак Абеля сходимости рядов . . . . .	189
§ 7.4. Произведение Коши двух рядов . . . . .	191
§ 7.5. Гармонический ряд . . . . .	193
§ 7.6. Степенные ряды . . . . .	195
§ 7.7. Ряд для логарифма . . . . .	200
§ 7.8. Бином Ньютона . . . . .	201
§ 7.9. Ряды для числа $\pi$ . . . . .	202
§ 7.10. Производящие функции . . . . .	204
§ 7.11. Двойные ряды . . . . .	206
§ 7.12. Подстановка ряда в ряд . . . . .	208
§ 7.13. Экспонента в комплексной области . . . . .	210
§ 7.14. Степенные ряды в комплексной области . . . . .	211
§ 7.15. Числа и многочлены Бернулли . . . . .	213
§ 7.16. Бесконечные произведения . . . . .	215
§ 7.17. Эйлеровы разложения тригонометрических функций . . . . .	219
§ 7.18. Решения задач . . . . .	223
<b>Глава 8. Мера Лебега. Интеграл Лебега . . . . .</b>	<b>236</b>
§ 8.1. Множества меры нуль . . . . .	236
§ 8.2. Критерий Лебега интегрируемости по Риману . . . . .	237
§ 8.3. Мера Жордана и мера Лебега на прямой . . . . .	239
§ 8.4. Интеграл Лебега на прямой . . . . .	245
§ 8.5. Интеграл Стильтьеса . . . . .	250
§ 8.6. Решения задач . . . . .	251
<b>Часть II. Функции многих переменных</b>	
<b>Глава 9. Функции многих переменных . . . . .</b>	<b>255</b>
§ 9.1. Топология пространства $\mathbb{R}^n$ . . . . .	256
§ 9.2. Дифференциал . . . . .	257
§ 9.3. Теорема о среднем значении . . . . .	265
§ 9.4. Формула Тейлора . . . . .	267
§ 9.5. Метод множителей Лагранжа . . . . .	270
§ 9.6. Лемма Адамара . . . . .	274
§ 9.7. Решения задач . . . . .	274
<b>Глава 10. Теорема о неявной функции . . . . .</b>	<b>283</b>
§ 10.1. Формулировка теоремы о неявной функции . . . . .	283
§ 10.2. Теорема об обратной функции . . . . .	284

§ 10.3. Сжимающие отображения . . . . .	287
§ 10.4. Уравнение касательной плоскости . . . . .	289
§ 10.5. Метод множителей Лагранжа — 2 . . . . .	290
§ 10.6. Отображения постоянного ранга . . . . .	292
§ 10.7. Якобиан и функциональная зависимость . . . . .	294
§ 10.8. Локальное разложение диффеоморфизма . . . . .	295
§ 10.9. Решения задач . . . . .	297
<b>Глава 11. Кратные интегралы . . . . .</b>	<b>298</b>
§ 11.1. Повторный интеграл . . . . .	298
§ 11.2. Дифференцирование под знаком интеграла . . . . .	298
§ 11.3. Изменение порядка интегрирования . . . . .	300
§ 11.4. Равномерно сходящиеся интегралы . . . . .	302
§ 11.5. Кратный интеграл . . . . .	307
§ 11.6. Выражение кратного интеграла через повторный . . . . .	309
§ 11.7. Криволинейные и поверхностные интегралы . . . . .	312
§ 11.8. Замена переменных в кратном интеграле . . . . .	316
§ 11.9. Сферические координаты . . . . .	320
§ 11.10. Инвариантное интегрирование на пространстве прямых . . . . .	322
§ 11.11. Решения задач . . . . .	325
<b>Глава 12. Анализ на многообразиях . . . . .</b>	<b>327</b>
§ 12.1. Определение и основные свойства . . . . .	327
§ 12.2. Касательное пространство . . . . .	331
§ 12.3. Метод множителей Лагранжа — 3 . . . . .	334
§ 12.4. Дифференциальные формы в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	335
§ 12.5. Разбиение единицы . . . . .	343
§ 12.6. Дифференциальные формы на многообразиях . . . . .	347
§ 12.7. Интегрирование на многообразиях . . . . .	350
§ 12.8. Степень отображения . . . . .	353
§ 12.9. Функции Морса . . . . .	357
§ 12.10. Решения задач . . . . .	361
<b>Часть III. Дополнительные главы</b>	
<b>Глава 13. Специальные функции . . . . .</b>	<b>367</b>
§ 13.1. Определения гамма-функции . . . . .	367
§ 13.2. Свойства гамма-функции . . . . .	372
§ 13.3. Бета-функция . . . . .	374
§ 13.4. Интеграл Дирихле . . . . .	375
§ 13.5. Дробное интегрирование и дифференцирование . . . . .	377
§ 13.6. Функции Бесселя . . . . .	379
§ 13.7. Гипергеометрический ряд . . . . .	383
§ 13.8. Решения задач . . . . .	385

<b>Глава 14.</b> Ряды Фурье. Интеграл Фурье . . . . .	387
§ 14.1. Тригонометрические многочлены . . . . .	387
§ 14.2. Разложения по ортогональным системам функций . . . . .	389
§ 14.3. Ядро Дирихле и ядро Фейера . . . . .	391
§ 14.4. Теорема Фейера и сходимость рядов Фурье . . . . .	393
§ 14.5. Равенство Парсеваля . . . . .	396
§ 14.6. Теорема Вейерштрасса . . . . .	398
§ 14.7. Интеграл Фурье . . . . .	400
§ 14.8. Решения задач . . . . .	406
<b>Глава 15.</b> Расходящиеся ряды . . . . .	407
§ 15.1. Асимптотические разложения . . . . .	407
§ 15.2. Формула Эйлера—Маклорена . . . . .	409
§ 15.3. Суммирование расходящихся рядов . . . . .	412
<b>Глава 16.</b> Дополнительные темы классического анализа . . . . .	415
§ 16.1. Непрерывные дроби . . . . .	415
§ 16.2. Трансцендентность чисел $e$ и $\pi$ . . . . .	421
§ 16.3. Теорема Лиувилля об элементарных интегралах . . . . .	427
§ 16.4. Условно сходящиеся ряды векторов . . . . .	436
§ 16.5. Решения задач . . . . .	443
<b>Глава 17.</b> Квантовый анализ . . . . .	444
§ 17.1. $q$ -Факториал и $q$ -биномиальный коэффициент . . . . .	444
§ 17.2. $q$ -Производная . . . . .	445
§ 17.3. $q$ -Формула Тейлора для многочленов . . . . .	446
§ 17.4. Два $q$ -интеграла . . . . .	447
§ 17.5. Две $q$ -экспоненты . . . . .	449
§ 17.6. Исчисление конечных разностей . . . . .	452
§ 17.7. Решения задач . . . . .	453
<b>Глава 18.</b> $p$ -Адический анализ . . . . .	455
§ 18.1. Поле $p$ -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ . . . . .	455
§ 18.2. Топология пространства $\mathbb{Q}_p$ . . . . .	457
§ 18.3. Дифференцирование . . . . .	458
§ 18.4. Некоторые элементарные функции . . . . .	459
§ 18.5. Решения задач . . . . .	460
Предметный указатель . . . . .	467
Указатель имён . . . . .	478